

Penaksir Tak Bias Variansi Minimum Seragam

Georgina M. Tinungki[†]

Abstrak

Apabila terdapat lebih dari satu penaksir tak bias, maka ada tak berhingga banyaknya penaksir tak bias, akan tetapi mungkin pula tidak ada satu pun penaksir tak bias. Sehingga dapat muncul dua pertanyaan, yaitu bagaimana cara memilih salah satu penaksir tak bias untuk dipakai, jika terdapat beberapa atau banyak penaksir tak bias, dan penaksir bias bagaimana yang harus digunakan jika tidak terdapat penaksir tak bias. Beberapa sifat dari penaksir kemungkinan maksimum dapat menjawab pertanyaan yang muncul, dengan melihat sifat ketak biasan, keselarasan dan bentuknya yang lain. Penaksir tak bias optimum dengan penaksir tak bias varian minimum seragam mempunyai varian yang minimum di antara semua kemungkinan penaksir yang tak bias. Penaksir tak bias varian minimum seragam yang ada biasanya mencapai batas bawah variansi Rao-Cramer, meskipun penaksir tak bias bervariansi minimum ini bisa saja tidak dapat ditentukan. Suatu metode mencari penaksir tak bias varian minimum seragam adalah dengan mencari suatu fungsi tak bias dari suatu statistik cukup yang lengkap. Bentuk lainnya adalah dengan mencari fungsi tak bias jika diketahui adanya suatu statistik cukup yang lengkap.

Keywords: *Penaksir tak bias, variansi minimum seragam, statistik cukup.*

1. Pendahuluan

Gagasan dasar dari penaksir statistik, khususnya penaksir titik yaitu dengan mengamati peubah acak X_1, X_2, \dots, X_n , dalam hal ini tidak perlu bebas maupun berdistribusi identik, dimana fungsi distribusi X_1, X_2, \dots, X_n bergantung pada parameter θ yang tidak diketahui, seperti misalnya rata-rata suatu distribusi normal yang mungkin tidak diketahui, namun diketahui termasuk dalam suatu himpunan tertentu Θ . Masalah dalam menaksir Θ merupakan permasalahan penaksir titik. Dalam menaksir Θ digunakan suatu fungsi yang sesuai dengan pengamatan X_1, X_2, \dots, X_n yang disebut sebagai ‘statistik’ atau suatu ‘penaksir’.

Jika terdapat lebih dari satu penaksir tak bias, maka ada tak berhingga banyaknya penaksir tak bias, akan tetapi mungkin pula tidak ada satu pun penaksir tak bias. Dalam hal ini akan muncul dua pertanyaan. Pertama, jika terdapat banyak penaksir tak bias, bagaimana cara memilih salah satu untuk dipakai. Kedua, jika tidak terdapat penaksir tak bias, penaksir bias macam apa yang sebaiknya dipergunakan? Beberapa sifat dari penaksir kemungkinan maksimum yang dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan yang muncul, dengan melihat sifat ketak biasan, keselarasan dan bentuknya yang lain.

Dalam banyak permasalahan terapan, yang diinginkan bukanlah menaksir parameter Θ itu sendiri, tetapi suatu fungsi dari parameter tersebut. Sebagai ilustrasi, jika ingin membandingkan distribusi pendapatan dua kota, jika Δ adalah prosentase dalam distribusi pendapatan yang tumpang tindih, maka untuk menaksir Δ tidak saja harus menaksir μ , ν , dan σ ,

[†] Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar

tetapi juga suatu fungsi dari ketiga parameter tersebut. Penggunaan prinsip ketakragaman dari penaksir kemungkinan maksimum akan memecahkan masalah ini.

Penaksir tak bias optimum dengan penaksir tak bias varian minimum seragam mempunyai varian yang minimum diantara semua kemungkinan penaksir yang tak bias. Walaupun penaksir tak bias varian minimum seragam tidak selalu ada, tetapi sering pula ada dan mencapai batas bawah variansi Cramer-Rao dari suatu penaksir tak bias. Suatu metode mencari penaksir tak bias varian minimum seragam, dengan mencari suatu fungsi tak bias dari suatu statistik cukup yang lengkap. Bentuk lainnya adalah mencari fungsi tak bias jika diketahui statistik cukup lengkap.

2. Landasan Teori

2.1. Penaksir Tak Bias

Jika terdapat peubah acak X_1, X_2, \dots, X_n (tidak perlu bebas maupun berdistribusi identik), fungsi distribusi dari X_1, X_2, \dots, X_n bergantung pada parameter θ yang tidak diketahui (misalnya rata-rata suatu distribusi normal mungkin tidak diketahui), tetapi diketahui termasuk dalam suatu himpunan tertentu θ . Persoalan menaksir θ merupakan permasalahan penaksir titik. Jika dipunyai ruang sampel dasar Ω , percobaan pada dasarnya memilih suatu $w \in \Omega$, yang pengamatannya $X_1(w) = x_1, \dots, X_n(w) = x_n$, dan fungsi distribusi dari X_1, X_2, \dots, X_n , misalnya $F_{x_1, \dots, x_n}(y_1, \dots, y_n | \theta)$. Jika ingin menaksir θ , tentunya adalah penaksiran θ menggunakan suatu fungsi yang sesuai dari pengamatan X_1, X_2, \dots, X_n . Fungsi seperti ini disebut suatu penaksir.

Definisi 1. Setiap fungsi peubah acak yang diamati $t_n(X_1, \dots, X_n)$, disebut penaksir dari θ dimana X_1, X_2, \dots, X_n p.a. maka fungsi itu juga suatu p.a. Suatu nilai tertentu dari penaksir $t_n(X_1, \dots, X_n)$ disebut taksiran dari θ . Jika diinginkan penaksir θ yang pada rata-ratanya tepat sama dengan θ , dan jika demikian penaksir θ disebut “tak bias”.

Definisi 2. Dikatakan $t_n(X_1, \dots, X_n)$ suatu penaksir tak bias dari θ jika $E_{\theta} t_n(X_1, \dots, X_n) \equiv \theta$, untuk semua $\theta \in \Theta$. Subscript θ pada tanda harapan menyatakan fungsi distribusi $F_{x_1, \dots, x_n}(y_1, \dots, y_n | \theta)$ yang akan digunakan dalam menghitung nilainya.

Sifat lain yang dimiliki suatu penaksir θ ialah kekonvergenan dalam peluang ke θ (yakni, peluangnya ‘mengumpul’ dekat ke θ), jika banyaknya pengamatan $n \rightarrow \infty$. Jika X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel random dari populasi berdistribusi Normal dengan mean μ dan variansi σ^2 , maka penduga titik untuk μ adalah

$$\hat{\mu} = g(\mathbf{X}) = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Untuk n cukup besar, maka \bar{X}_n adalah dekat dgn μ dalam arti bahwa :

$$P[|\bar{X}_n - \mu| \leq \delta] = \left| \int_{-\sqrt{n}\delta/\sigma}^{\sqrt{n}\delta/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \right| \longrightarrow 1$$

untuk $n \rightarrow \infty$, sehingga $E(\bar{X}) = \mu$ dan σ^2 .

2.2. Metode Kemungkinan Maksimum (*Maksimum Likelihood Estimator*)

Metode untuk menghitung estimasi titik yang paling populer adalah metode Kemungkinan Maksimum (*a maximum likelihood estimator*) yang memilih $\hat{\theta}$, yang merupakan pilihan “terbaik” untuk data observasi yang sebenarnya. Anggapan bahwa variabel random X_1, X_2, \dots, X_n mempunyai distribusi bersama P dengan parameter θ .

Metode estimasi kemungkinan maksimum berusaha menentukan Modus (harga yang memaksimumkan fkp dari distribusi). Namun kenyataannya modus merupakan estimasi yang lebih jelek dari mean atau median, yang menjelaskan mengapa sifat-sifat sampel kecil metode ini umumnya jelek. Tetapi untuk sampel yang besar, modus cenderung mendekati mean dan median, sehingga metode ini mempunyai sifat-sifat sampel besar yang “baik”.

Formulasi Prinsip Metode Maksimum Likelihood

Pandang sampel random X_1, X_2, \dots, X_n dari distribusi yang mempunyai pdf $f(x; \theta) \in \Omega$. Fkp (pdf) bersama dari X_1, X_2, \dots, X_n adalah $f(x_1; \theta), f(x_2; \theta), \dots, f(x_n; \theta)$.

Pdf bersama dapat dipandang sebagai suatu fungsi dari θ , yang dikatakan sebagai **fungsi likelihood** L dari sampel random, dan ditulis sebagai :

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta), \quad \theta \in \Omega$$

Dari pendugaan tersebut diperoleh fungsi yang tidak berarti (*nontrivial function*), katakan $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sedemikian hingga bila θ diganti oleh $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, fungsi likelihood L adalah *maksimum*. Atau, dapat dikatakan

$$L[u(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n] < L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall \quad \theta \in \Omega$$

Maka statistik $u(X_1, X_2, \dots, X_n)$, disebut sebagai **Penduga Maksimum Likelihood** dari θ , dan dinyatakan dengan simbol $\hat{\theta} = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Sebagai contoh, jika X_1, X_2, \dots, X_n menyatakan sampel random dari distribusi dengan fkp

$$f(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x=0,1 \\ = 0, \quad \text{lainnya, dimana } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Maka fkp bersama dari distribusi di atas

$$\theta^{x_1} (1-\theta)^{1-x_1} \theta^{x_2} (1-\theta)^{1-x_2} \dots \theta^{x_n} (1-\theta)^{1-x_n} = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i}$$

dimana x_i sama-sama 0 atau 1, $i = 1, 2, \dots, n$. Sehingga fungsi $L(\theta)$, yang disebut sebagai *fungsi likelihood*, dituliskan menjadi

$$L(\theta) = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Peluang maksimum $L(\theta)$ dari sampel x_1, x_2, \dots, x_n adalah θ . Jelas, nilai maksimum dari θ merupakan estimasi yang baik dari θ sebab peluangnya lebih besar dari pada sampel yang utama. Bagaimanapun karena fungsi likelihood $L(\theta)$ beserta logaritmanya $\ln L(\theta)$ adalah maksimum untuk nilai θ yang sama, maka salah satu dari $L(\theta)$ atau $\ln L(\theta)$ dapat digunakan. Dalam hal ini,

$$\ln L(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln \theta + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1 - \theta)$$

Jadi

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n - \sum x_i}{1 - \theta} = 0$$

Terlihat bahwa θ tidak sama dengan 0 atau 1. Ini ekuivalen untuk persamaan

$$(1 - \theta) \sum_{i=1}^n x_i = \theta \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Sehingga diperoleh persamaan untuk θ adalah $\theta = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ dimana maksimum $\sum_{i=1}^n x_i$ itu ada, sehingga $L(\theta)$ dan $\ln L(\theta)$ dapat diperiksa. , dalam kasus $\sum_{i=1}^n x_i/n$, x_1, x_2, \dots, x_n bersama-sama adalah 0 dan 1. $\sum_{i=1}^n x_i/n$ adalah nilai maksimum $L(\theta)$ dari θ , atau secara statistik dikatakan adalah Estimasi Maximum Likelihood dari θ .

2.3. Kecukupan Statistik

Apabila diamati suatu peubah acak X yang distribusinya bergantung pada suatu parameter θ yang tidak diketahui (misalnya $X = (X_1, \dots, X_n)$, dengan X_1, \dots, X_n peubah acak bebas dan berdistribusi identik, masing-masing mempunyai fungsi kepadatan $f(x/\theta)$, sedangkan θ tidak diketahui, $\theta \in \Theta$), maka X dapat disederhanakan melalui suatu fungsi tanpa kehilangan suatu informasi tentang θ . Sebagai ilustrasi, jika $t(X) = t(X_1, \dots, X_n) = (X_1, \dots, X_n)/n$, rata-rata sampel, mungkin dari berbagai hal mengandung semua informasi tentang θ yang relevan, dalam hal tersebut $t(X)$ disebut suatu **statistik cukup**.

Definisi 3. Statistik $t(X_1, \dots, X_n)$ adalah statistik cukup untuk θ jika $P_\theta[(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{G} | t(X_1, \dots, X_n) = c] = I(\mathcal{G} | c)$, $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathfrak{R}^n$. Jika bagian kiri persamaan diatas suatu fungsi dari \mathcal{G} dan c , misalnya $I(\mathcal{G} | c)$, tapi bukan fungsi dari θ (disini θ dan c mungkin vektor).

2.4. Kelengkapan Statistik

Definisi 4. Apabila suatu statistik cukup T pada suatu masalah memiliki keluarga fungsi kepadatan peluang $g(x/\theta)$ yang lengkap, maka T disebut **statistik cukup lengkap**.

Sebagai ilustrasi, misalkan X_1, \dots, X_n peubah acak bebas, masing-masing seragam pada $[0, \theta]$ dengan $\theta > 0$. $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ suatu statistik cukup untuk θ dan mempunyai fkp

$$f_{Y_n}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} I_{[0, \theta]}(x)$$

Dalam menyelidiki kelengkapan keluarga ini, misalkan $u(\cdot)$ sembarang fungsi, maka $E_\theta u(Y_n) = 0$, yang berarti

$$\int_0^\theta \frac{u(x)nx^{n-1}}{\theta^n} dx = 0$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan θ/n yang > 0 , maka berlaku

$$\int_0^\theta u(x)x^{n-1} dx = 0$$

Sehingga $u(\theta) = 0$, $\forall \theta$, atau dengan kata lain $u(x) = 0$, $\forall x > 0$. Sehingga Y_n merupakan statistik cukup lengkap untuk θ .

2.5. Penaksir Tak Bias Bervariansi Minimum Seragam

Penaksir tak bias bervariansi minimum merupakan penaksir yang mempunyai variansi yang minimum di antara semua kemungkinan penaksir tak bias, walaupun penaksir tidak selalu ada. Namun demikian, suatu penaksir tak bias bisa mencapai batas bawah ketaksamaan Cramer–Rao. Batas bawah ini diperoleh dengan mencari suatu fungsi tak bias dari suatu statistik cukup yang lengkap.

Definisi 5. Jika dimisalkan $E_\theta t_i \Big|_{\theta} = \theta_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, r$, dan di antara semua penaksir tak bias θ_i , t_i mempunyai varian terkecil untuk setiap kemungkinan nilai θ , maka t_i disebut **penaksir tak bias dengan variansi minimum seragam (PTVMS) dari θ** .

Perhatikan Teorema Rao-Blackwell berikut, yang akan memberikan teknik mencari penaksir tak bias Y , dimana diketahui suatu penaksir tak bias $\varphi(X)$ yang baru dari θ sedemikian rupa sehingga $\varphi(X)$ mempunyai variansi yang lebih kecil dari variansi Y secara menyeluruh (seragam).

Teorema 1: Teorema Rao-Blackwell. Apabila X dan Y peubah acak yang memenuhi $E(Y) = \mu$ dan $\text{Var}(Y) = \sigma^2_Y < +\infty$. Andaikan $\varphi(x) = E(Y|X = x)$, maka $E\varphi(X) = \mu$ dan $\text{Var}\varphi(X) \leq \sigma^2_Y$. Kesamaan ini berlaku jika $P[Y = \varphi(X)] = 1$.

Bukti:

Misalkan $f(x, y)$ menyatakan fungsi kepadatan gabungan dari (X, Y) , dimana $f_1(x)$ fungsi padat dari X , $f_2(y)$ fungsi padat dari Y , dan $h(y/x)$ fungsi padat bersyarat dari Y jika diketahui $X = x$. Pertama akan diperlihatkan bahwa $E\varphi(X) = \mu$. Mengingat

$$E(Y / X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y h(y / x) dy = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dy}{f_1(x)} = \varphi(x)$$

maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dy = \varphi(x) f_1(x)$$

sehingga

$$\begin{aligned} E\varphi(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy = \mu \end{aligned}$$

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa $Var\varphi(X) \leq \sigma_Y^2$; kesamaan berlaku jika $P[Y = \varphi(X)] = 1$.
Maka diperoleh

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E(Y - \mu)^2 = E[Y - \varphi(X) + (\varphi(X) - \mu)]^2 \\ &= E(Y - \varphi(X))^2 + E(\varphi(X) - \mu)^2 + 2E(Y - \varphi(X))(\varphi(X) - \mu) \\ &= E(Y - \varphi(X))^2 + Var\varphi(X) + 0. \end{aligned}$$

Sehingga

$$Var\varphi(X) = \sigma_Y^2 - E(Y - \varphi(X))^2 \leq \sigma_Y^2,$$

Kesamaan berlaku jika $E(Y - \varphi(X))^2 = 0$, dan terakhir benar jika $P[Y = \varphi(X)] = 1$. \square

Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut ini, andaikan X_1, \dots, X_n peubah acak bebas, masing-masing $N(\mu, \sigma^2)$, μ dan σ^2 keduanya tidak diketahui. PTVMS dapat dicari dengan terlebih dahulu menunjukkan bahwa X_1, \dots, X_n peubah acak bebas, dimana $(\varphi_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \varphi_r(X_1, \dots, X_n))$ yang merupakan statistik cukup minimum untuk θ , $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, maka diperoleh statistik cukup minimum lengkap $T(X_1, \dots, X_n) = (\sum X_i, \sum X_i^2)$ untuk (μ, σ^2) . Juga $\bar{X}_n = \sum X_i / n$ dan $s_n^2 = \sum (X_i - \bar{X}_n)^2 / (n-1)$ adalah fungsi tak bias dari statistik cukup lengkap :

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_n) &= \mu \\ E(s_n^2) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\bar{X}_n &\text{ suatu PTVMS untuk } \mu \\ s_n^2 &\text{ suatu PTVMS untuk } \sigma^2.\end{aligned}$$

Daftar Pustaka

- [1]. Dudewicz E.J., and Mishra, S.N., 1988, "*Modern Mathematical Statistics*", John Wiley & Sons Inc., New York.
- [2]. Hogg, R.V., and Craig, E., 1995, "*Introduction to Mathematical Statistics, 5th Edition*", Prentice-Hall, New York.